QLB: Una Logica Quantificata delle Credenze

A. Lomuscio*

A.R.Lomuscio@cs.bham.ac.uk

10 Maggio, 1996

Abstract

Il presente articolo descrive QLB (Quantified Logic for Belief), una logica predicativa delle credenze, che costituisce una possibile estensione al prim'ordine del sistema modale KD45n. Le caratteristiche principali di QLB sono che: (i) è permessa la quantificazione sugli agenti di credenza; (ii) l'operatore di credenza può essere indicizzato da un qualsiasi termine del linguaggio; (iii) i termini non sono trattati come disegnatori rigidi, ma sono interpretati contestualmente; (iv) è possibile dimostrare per via automatica i teoremi del sistema logico. QLB è una logica parziale, con semantica monotona su insiemi ordinati e i suoi teoremi semantici sono definiti come quelle formule che possono essere interpretate come vere e mai come false.

1 Introduzione

Le logiche epistemiche e doxastiche, cioè della conoscenza e della credenza, giocano un ruolo importante in intelligenza artificiale (IA) e, in particolare, in teoria degli agenti. La scelta piú

*La presente ricerca è stata svolta come parte della Tesi di Laurea [Lom95] in Ingegneria Elettronica, discussa il 22/12/95 presso il Politecnico di Milano (I). Indipendentemente da quanto espresso in tale occasione, desidero ringraziare il Prof. Marco Colombetti, mio relatore, per i preziosi suggerimenti circa la stesura di questo articolo.

spesso adottata è quella di utilizzare un particolare sistema modale, per il quale è disponibile un adeguato trattamento teorico (si veda, ad esempio [Che80]). In particolare, i sistemi modali piú comunemente utlizzati sono KT45n (per la conoscenza) e KD45n (per la credenza) ([HM92] per una dettagliata esposizione delle caratteristiche di tali sistemi), che risultano essere estensioni ad n operatori modali di KT45 e KD45.

Sebbene l'utilizzo di istanze proposizionali della logica modale sia perfettamente convalidato dalla teoria, ciò è insufficiente alle necessità dell' IA: per costruire teorie di agente sufficientemente espressive è necessario disporre di una logica del prim'ordine con operatori modali. Sfortunatamente, la logica modale quantificata è ancora ben lontana da una sistematizzazione sufficiente; o, almeno, non esistono al momento semplici estensioni a livello predicativo di KT45n e KD45n che possono essere prontamente adottate come logiche quantificate della credenza e della conoscenza. Le ragioni di ciò sono piuttosto profonde (si veda ad esempio [Gar84]) ed è lecito non attendersi una risposta a tali problemi in un immediato futuro. È invece possibile e utile proporre soluzioni parziali ed analizzare la loro adeguatezza nei confronti di obbiettivi specifici.

In questo articolo ci occuperemo soltanto di logiche modali quantificate (LMQ) atte ad esprimere credenze (una estensione per la conoscenza dovrebbe essere immediata); in particolare, introdurremo il sistema logico QLB (Quantified Logic for Belief), come strumento utile alla rappresentazione ed inferenza di credenze di una comunità di agenti.

La necessità di utilizzare un linguaggio che permetta la quantificazione non richiede quasi giustificazione: naturalmente vorremmo esprimere fatti come "l'agente α crede che tutti gli uomini siano buoni", ecc. Apparentemente, una tale capacità espressiva può essere ottenuta aggiungendo la quantificazione del prim'ordine all'interno del sistema modale KD45n. In tal modo, l'esempio precedente diverrebbe

$$B_\alpha \forall x(uomo(x) \Rightarrow buono(x)).$$

Tuttavia, vorremmo anche poter rappresentare fatti come “tutti gli uomini sono creduti essere buoni dalle rispettive mamme”; ciò comporta la quantificazione sugli agenti — una possibilità che, a nostra conoscenza, non è finora stata considerata in letteratura. Intuitivamente, vorremmo potere scrivere formule come

$$\forall x(uomo(x) \Rightarrow B_{mamma(x)} buono(x)),$$

e ciò richiede la possibilità di indicizzare l’operatore di credenza con termini complessi. Come vedremo, permettere una tale possibilità comporta principalmente due ordine di problemi, che saranno considerati nel resto dell’articolo: l’interpretazione contestuale dei termini e l’opportunità di considerare, sotto certe condizioni, alcune formule come indeterminate.

L’articolo è organizzato come segue. Nella sezione 2, analizziamo informalmente le nostre assunzioni di base. La sezione 3 riguarda alcuni concetti circa le funzioni parziali, che saranno usati nel resto dell’articolo. La sezione 4 introduce il linguaggio formale di QLB e la sua semantica. Nella sezione 5, mostriamo le capacità espressive di QLB e analizziamo alcuni rapporti tra QLB ed altri sistemi logici, particolarmente quelli classici. Nella sezione 6 presentiamo un metodo di prova automatica dei teoremi di QLB. In ultimo nella sezione 7, esprimiamo le nostre conclusioni e suggeriamo alcune direzioni per ulteriore ricerca sul presente soggetto.

2 Assunzioni preliminari

Il linguaggio di un sistema modale multi-agente della credenza fornisce tipicamente una famiglia B_i (o $\Box_i$) di operatori modali, dove l’indice i può variare su un insieme finito $\mathbf{A}$ di agenti. In tali sistemi gli agenti sono considerati *ideali*, cioè *coerenti* e con capacità *introspettive* totali. Se intendiamo estendere a livello predicativo un simile sistema modale, una scelta naturale è quella di assumere che gli agenti siano elementi del dominio $\mathbf{D}$ degli individui. Per massimizzare le capacità espressive di QLB, il linguaggio dovrà permettere di denotare gli agenti tramite termini di complessità arbitraria. Ciò implica fornire un operatore modale B_t, parametrizzato su un termine qualunque t.

È semplice prevedere che considerare i termini come designatori rigidi non soddisfa i nostri scopi: poiché vogliamo considerare un numero arbitrario di agenti di credenza, non possiamo supporre che uno stesso termine sia interpretato allo stesso modo da ciascun agente in considerazione. Agenti diversi, infatti, potrebbero avere avuto differenti esperienze nei rispettivi ambienti e potrebbero ragionevolmente denotare con lo stesso termine differenti oggetti. Ad esempio, con il termine '*caffè*' un italiano ed un inglese denotano oggetti del tutto differenti! Inoltre, uno stesso termine potrebbe denotare oggetti diversi anche per uno stesso agente a seconda della alternativa epistemica in cui è interpretato. L'interpretazione di costanti e di simboli di funzione, contenuti in occorrenze di termini, dunque, deve dipendere dal contesto della stessa.

Un ulteriore problema si pone nel momento in cui si considerano espressioni del tipo:

$$B_t\varphi, \tag{1}$$

in cui t e φ sono, rispettivamente, termini e formule qualsiasi. Abbiamo considerato individui tutti gli agenti, ma, naturalmente, non possiamo supporre che tutti gli individui siano agenti; abbiamo, dunque, il problema di assegnare una interpretazione a (1) allorché t non denoti un agente. Poiché le credenze sono caratteristiche degli agenti, una scelta ovvia a riguardo sarebbe quella di considerare (1) *falsa*. Il problema è che ciò implicherebbe che la formula

$$B_t(\varphi \vee \neg\varphi) \tag{2}$$

possa essere *falsa* per qualche t, dunque non un teorema di QLB. Chiaramente, un sistema logico di questo tipo non potrebbe modellizzare agenti ideali.

Una risposta che pare evitare tali problemi è costituita dall'utilizzo di sistemi logici multi-sorta, di modo da assegnare una sorta agli agenti di credenza ed un'altra agli altri individui.

Ciò permetterebbe di costruire formule di credenza 'ben formate', in quanto potremmo fissare la denotazione dell'indice dell'operatore B sull'insieme degli agenti. Sfortunatamente, questo tentativo non sembra funzionare completamente. Consideriamo, ad esempio, una formula aperta con operatori di credenza annidati:

$$B_x B_{Charles\_Dodgson} simpatica(Alice).$$

A seconda dell'agente x in considerazione, la denotazione di 'Charles_Dodgson' può essere un determinato scrittore, un insegnante di Matematica o, persino, nessuno agente. Quest'ultima possibilità deve essere presa in considerazione perché l'indice 'Charles_Dodgson' potrebbe essere sconosciuto all'agente x e, conseguentemente, potrebbe non essere considerato un agente. L'esempio precedente mostra che la flessibilità di denotazione dell'indice dell'operatore di credenza non è sufficiente ai nostri scopi; alcuni termini-indice potrebbero essere ragionevolmente sconosciuti o non interpretati come agenti da altri agenti; anche un sistema a due sorte, dunque, non può assicurarci di costruire formule di credenza libere da problemi interpretativi.

Una altra possibilità per non rinunciare ai sistemi modali, è considerare (1) come *indeterminata* allorché t non denoti un agente. In tal caso, (2) può rimanere un terorema di QLB, a patto che la nozione di teorema sia adeguatamente definita. Anche se, naturalmente, nulla ci forza ad usare i tradizionali sistemi modali per rappresentare le credenze, riteniamo saggio essere quantomeno esitanti nell'abbandonare una logica che si è dimostrata essere in grado di rappresentare adeguatamente le proprietà tipiche degli agenti ideali (una panoramica delle logiche doxastiche proposizionali è presente in [WJ95]). Decidiamo, dunque, di utilizzare un sistema modale con una semantica che ci consenta di considererare (1) indeterminata quando t non denota un agente; QLB risulterà allora un sistema logico parziale, cioè una logica con *truth-value gaps* ([Bla86]).

Esistono anche altre ragioni per definire QLB come un sistema parziale. Nel calcolo classico dei predicati ad una sorta può essere problematico assegnare un valore di verità ad alcune formule. Un classico esempio in proposito è la non semplice interpretazione della formula

$$coraggioso(re\_di\_Francia)$$

in un mondo che rappresenti il mondo reale. È da notare che situazioni simili possono originarsi anche senza la presenza di termini che denotino oggetti non esistenti. Un altro classico problema di interpretazione è, infatti, causato da errori di sorta nella combinazione di predicati e termini. Ad esempio la formula

$$integrabile(questo\_inchiostro),$$

pare non avere alcun significato, sebbene tanto il termine quanto il predicato abbiano denotazioni definite. QLB, come del resto tutte le logiche parziali, assegna a queste formule il valore di verità *indeterminato*, che deve essere considerato l'ultima risorsa interpretativa per le formule del linguaggio.

Un decisione chiave in logica modale quantificata è la scelta tra un unico dominio di individui e diversi dominii dipendenti dal mondo in considerazione. Questa scelta, che ha un notevole impatto sul sistema logico (si consideri, ad esempio, le ben note Formule Barcan), dipende dal significato che vogliamo assegnare alla struttura modale $\langle \mathbf{W}, \mathbf{D} \rangle$. Nell'utilizzo classico della logica modale $\mathbf{W}$ rappresenta un insieme di possibili configurazioni della realtà e $\mathbf{D}$ il dominio degli individui esistenti. Poiché gli individui esistenti variano a seconda della situazione che intendiamo considerare, in tali sistemi modali è spesso ragionevole impostare i dominii come funzione dei mondi, di modo che il quantificatore universale operi soltanto sugli individui esistenti nella situazione in analisi. Nelle logiche doxastiche l'insieme $\mathbf{W}$ degli stati possibili viene invece considerato come l'insieme delle alternative epistemiche di un agente di credenza (come proposto da Hintikka in [Hin62]); non è tuttavia ovvio il significato da attribuire al dominio $\mathbf{D}$. È probabile, ad esempio, che non vorremmo considerarlo come un insieme di individui esistenti come in logica classica, poiché, intuitivamente, le credenze si riferiscono ad individui semplicemente supposti. La nostra posizione è di considerare $\mathbf{D}$ come l'insieme degli individui *possibili*, cioè un dominio globale di oggetti, che possono essere denotati da termini. È utile sottolineare che la flessibilità di un dominio di quantificazione di questo tipo unita ad una funzione di interpretazione parziale permette di evitare alcuni dei problemi classici della logica del prim'ordine. Infatti, poiché il dominio contiene individui soltanto possibili, i quantificatori non hanno l'impatto esistenziale tipico della logica classica; l'interpretazione parziale evita invece i problemi causati da termini di difficile interpretazione nelle logiche mono-sorta.

La costruzione di una logica parziale richiede una definizione non classica di teorema. Una definizione molto semplice, tuttavia, ci permette di preservare i teoremi classici (indispensabili per modellizzare agenti ideali): un teorema è una formula talvolta vera e mai falsa. Nella Sezione 4 mostriamo come una logica modale predicativa per la credenza possa essere definita seguendo questa impostazione e nella sezione 6 proviamo che tali scelte non pregiudicano la possibilità di definire una procedura di prova automatica dei teoremi per un siffatto sistema logico. Prima di ciò, tuttavia, introduciamo alcuni concetti di base e la terminologia adeguata per trattare le funzioni parziali, che vengono in seguito utilizzate per definire la semantica di QLB.

3 Funzioni parziali

Considerato un insieme $\mathbf{X}$ (che non includa l'elemento $\perp$), denotiamo con $\mathbf{X}_\perp$ il discrete complete partial order (*discrete cpo*) su $\mathbf{X}$, cioè l'insieme parzialmente ordinato

$$\langle \mathbf{X} \cup \{\perp\}, \leq \rangle,$$

dove

$$x_1 \leq x_2 \text{ se e solo se } x_1 = \perp \text{ o } x_1 = x_2, \text{ con } x_1 \in \mathbf{X} \text{ e } x_2 \in \mathbf{X}.$$

Il simbolo $\perp$ viene chiamato *bottom* o *indeterminato.* Per ragioni di semplicità, nel seguito indicheremo con $\mathbf{X}_\perp$ tanto l'insieme parzialmente ordinato $\mathbf{X}_\perp$, quanto il suo insieme supporto $\mathbf{X} \cup \{\perp\}$.

Un ordinamento parziale su $\mathbf{X}_\perp$ induce un ordinamento parziale su $(\mathbf{X}_\perp)^n$, tramite:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \leq \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \text{ se e solo se } x_i \leq y_i \text{ (per i=1,...,n).}$$

In particolare considereremo i discrete cpo $\mathbf{B}_\perp$, $\mathcal{P}(\mathbf{W})_\perp$ e $(\mathbf{D}_\perp)^n$, in cui $\mathbf{B}$={0,1} è l'insieme dei valori di verità Booleani, $\mathcal{P}(\mathbf{W})$ è l'insieme potenza dell'insieme dei mondi possibili e $\mathbf{D}$ è l'insieme degli individui possibili.

Una funzione (totale) su $\mathbf{X}_\perp$ si dice *parziale* su $\mathbf{X}$.

Nel seguito utilizzeremo i concetti di *estensione* e *monotonicità* riferendoci a funzioni definite su discrete cpo.

Una funzione $f' : (\mathbf{X}_\perp)^n \to \mathbf{Y}_\perp$ *estende* una funzione $f : (\mathbf{X}_\perp)^n \to \mathbf{Y}_\perp$, in simboli $f \leq f'$, se e solo se:

$$f(x) \leq f'(x), \text{ per tutti } x \in (\mathbf{X}_\perp)^n.$$

Diciamo anche che f' è una *estensione* di f. Chiaramente, ogni funzione parziale ha almeno una estensione totale, cioè una estensione costituita da una funzione totale.

Una funzione $f : (\mathbf{X}_\perp)^n \to \mathbf{Y}_\perp$ si dice *monotona* se e solo se:

$$x_1 \leq x_2 \text{ implica } f(x_1) \leq f(x_2).$$

L'insieme di tutte le funzioni monotone aventi come dominio $(\mathbf{X}_\perp)^n$ e codominio $\mathbf{Y}_\perp$ verrà indicato con $((\mathbf{X}_\perp)^n \to \mathbf{Y}_\perp)$.

Quando una funzione è definita su insiemi non ordinati, le definizioni di *estensione* e *monotonicità* vengono riferite alla funzione corrispondente costruita sui discrete cpo di tali insiemi.

Come vedremo, le funzioni monotone da e verso discrete cpo giocano un ruolo centrale nella semantica di QLB. La ragione di ciò è semplice. È possibile interpretare il valore $\perp$ come un *gap informativo*; dunque, $x_1 \leq x_2$ significa che x_2 non possiede meno informazione di x_1. In questa interpretazione, una funzione è monotona se non "perde informazione"; cioè a input piú informativo corrisponde output non meno informativo. Giacché in questa ricerca si intendono modellizzare agenti ideali, non consideremo processi che comportano perdita di informazioni.

4 Linguaggio e semantica

4.1 Il linguaggio formale

Il linguaggio di QLB è costruito a partire da un insieme $\mathbf{C}$ di costanti individuali, un insieme numerabile $\mathbf{V}$ di variabili individuali, un insieme $\mathbf{F}$ di simboli di funzione, un insieme non vuoto $\mathbf{P}$ di simboli di predicato, che includa almeno il predicato di uguaglianza '=', i connettivi Booleani $\neg$, $\Rightarrow$, il quantificatore $\forall$ e un operatore modale parametrico B_t, che può essere indicizzato da un termine t arbitrario. L'insieme dei simboli di funzione (rispettivamente di predicato) di arità n verrà indicato con $\mathbf{F}_n$ ($\mathbf{P}_n$). I rimanenti connettivi logici e il quantificatore esistenziale sono introdotti come abbreviazioni nel modo consueto.

L'insieme $\mathbf{T}$ dei *termini* del languagio è costruito come segue:

- se $a \in \mathbf{C}$, allora $a \in \mathbf{T}$;
- se $x \in \mathbf{V}$, allora $x \in \mathbf{T}$;
- se $f \in \mathbf{F}$ e $t_1, \ldots, t_{\nu(f)} \in \mathbf{T}$, allora $f(t_1, \ldots t_\nu(f)) \in \mathbf{T}$, dove $\nu(f)$ è l'arità di f;

- nient'altro è in $\mathbf{T}$.

Il Linguaggio $\mathbf{L}$ di QLB è definito come segue:

- se $p \in \mathbf{P}$ e $t_1, \ldots, t_{\nu(p)} \in \mathbf{T}$, allora $p(t_1, \ldots, t_{\nu(p)}) \in \mathbf{L}$;
- se φ, $\psi \in \mathbf{L}$, allora $\neg\varphi \in \mathbf{L}$ e $\varphi \wedge \psi \in \mathbf{L}$;
- se $x \in \mathbf{X}$ e $\varphi \in \mathbf{L}$, allora $\forall x \varphi \in \mathbf{L}$;
- se $t \in \mathbf{T}$ e $\varphi \in \mathbf{L}$, allora $B_t\varphi \in \mathbf{L}$.

Le parentesi verranno utilizzate come di consueto per risolvere problemi di ambiguità.

4.2 Modelli e interpretazioni

Una *struttura* $\mathbf{S}$ per QLB è una coppia ordinata

$$\mathbf{S} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{D} \rangle,$$

in cui:

- $\mathbf{W}$ è un insieme non vuoto di alternative epistemiche o *mondi possibili*;
- $\mathbf{D}$ è un insieme non vuoto di *individui possibili.*

Per indicare elementi di $\mathbf{D}$ useremo i simboli α, β, α_1, α_2, etc.; w, w_1, w_2, ecc., rappresenteranno, invece, elementi di $\mathbf{W}$.

L'insieme $\mathcal{M}$ dei *modelli* di QLB è costituito da coppie ordinate

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{S}, \mathbf{I} \rangle = \langle \langle \mathbf{W}, \mathbf{D} \rangle, \langle \pi, bel \rangle \rangle,$$

in cui:

- $\mathbf{S}$ è una *struttura*;
- $\mathbf{I} = \langle \pi, bel \rangle$ viene detta *interpretazione doxastica*, in cui, a loro volta:

– la funzione π definisce per ogni mondo l'interpretazione di costanti, variabili, funzioni e predicati (dettagli in seguito);

– la funzione

$$bel : \mathbf{D}_\perp \times \mathbf{W} \to \mathcal{P}(\mathbf{W})_\perp,$$

parziale su $\mathcal{P}(\mathbf{W})$, definisce l'insieme dei mondi $bel_\alpha(w)$ accessibili per un individuo α a partire da un mondo w.

Un individuo α per il quale $bel_\alpha(w) \neq \perp$ viene detto *agente* (nel mondo w).

La funzione *bel* soddisfa le seguenti proprietà[1]:

1. $bel_\alpha(w) \neq \emptyset$, per ogni $w \in \mathbf{W}$.

2. se $w_2 \in bel_\alpha(w_1)$, allora $bel_\alpha(w_1) = bel_\alpha(w_2)$, con $w_1, w_2 \in \mathbf{W}$.

La funzione di interpretazione parziale π è composta dalle seguenti componenti:

- $\pi : \mathbf{C} \times \mathbf{W} \to \mathbf{D}_\perp$.

  L'interpretazione delle costanti è mondo-dipendente in modo da ottenere denotazioni dipendenti dal contesto. Essa è parziale su $\mathbf{D}$ poiché alcune costanti potrebbero non denotare alcun individuo su alcune alternative epistemiche (ad esempio 'ltadi' in assenza di una specifica definizione). Sottolineiamo ancora che le costanti denotano semplicemente individui possibili, che non si suppongono esistenti nel mondo in considerazione. Si noti, inoltre, che non è necessario che le formule contenenti termini privi di denotazione siano necessariamente indeterminate (ad esempio, l'espressione: "l'autore di questo articolo trova Paperino simpatico" è una formula doxastica vera nel mondo reale).

[1] La prima (rispettivamente seconda) condizione sono equivalenti alla proprietà seriale (rispettivamente Euclidea piú transitiva) delle corrispondenti relazioni di accessibilità, comunemente utilizzate in logica modale.

- $\pi : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to \mathbf{D}_\perp$ con $\pi(x_1, w_1) = \pi(x_1, w_2)$, per tutti $w_1, w_2 \in \mathbf{W}, x_1 \in \mathbf{V}$.

  Diversamente dalle costanti, assumiamo che l'interpretazione delle variabili non dipenda dal contesto. Come sarà mostrato in seguito, ciò aggiunge al linguaggio maggiore espressività.

- $\pi : \mathbf{F}_n \times \mathbf{W} \to ((\mathbf{D}_\perp)^n \to \mathbf{D}_\perp)$.

  I simboli di funzione denotano funzioni monotone sul dominio degli individui. Come le costanti, le funzioni possono mancare di denotare alcuni individui verso uno specifico elemento del dominio (si consideri, ad esempio, l'espressione 'La mamma di Paperino' interpretata nella classica letteratura Disneyana). Le funzioni sono monotone, in quanto modelli concernenti perdita di informazione sono al momento oltre i nostri obbiettivi.

- $\pi : \mathbf{P}_n \times \mathbf{W} \to ((\mathbf{D}_\perp)^n \to \mathbf{B}_\perp)$.

  I simboli di predicato denotano relazioni parziali monotone sul dominio degli individui possibili. Come per le funzioni siamo interessati soltanto ai predicati monotoni[2]. Il simbolo di predicato '=' è interpretato come uguaglianza su $\mathbf{D}$; assumiamo inoltre che quando uno dei termini denota il bottom di $\mathbf{D}$, il risultato del predicato di uguaglianza sia l'elemento $\perp$ di $\mathbf{B}$.

Possiamo ora definire ricorsivamente l'interpretazione di un termine su un mondo w:

$$\pi(f(t_1, \ldots, t_n), w) = \pi(f, w)(\pi(t_1, w), \ldots, \pi(t_n, w)).$$

In ultimo, dato un modello $\mathbf{M} = \langle\langle \mathbf{W}, \mathbf{D}\rangle, \langle \pi, bel\rangle\rangle$, per un qualunque $\alpha \in \mathbf{D}$ definiamo un modello:

$\mathbf{M}_{x:\alpha} = \langle\langle \mathbf{W}, \mathbf{D}\rangle, \langle \pi', bel\rangle\rangle$, in cui:

$\pi'(x, w) = \alpha \in \mathbf{D}$ per ogni $w \in \mathbf{W}$ e $\pi'(y, w) = \pi(y, w)$ per ogni $y \neq x$.

[2]Informalmente, un predicato p è monotono allorché se definito per $\nu(p)$ elementi di $\mathbf{D}_\perp$, non cambia valore di verità rimpiazzando alcuni $\perp$ con elementi di $\mathbf{D}$.

4.3 Verità e teoremi

Se $\mathbf{M} = \langle\langle \mathbf{W}, \mathbf{D}\rangle, \langle \pi, bel\rangle\rangle$ è un modello di QLB, definiamo ricorsivamente come segue il valore di verità in $\mathbf{M}$ su un mondo $w \in \mathbf{W}$ di una formula φ, *val(*$\mathbf{M}$*,*w*,*φ*)*$\in \mathbf{B}_\perp$.

Definizione 4.1 *La funzione* $val : \mathcal{M} \times \mathbf{W}_\mathcal{M} \times \mathbf{L} \to \mathbf{B}_\perp$ *è definita come una funzione parziale su* $\mathbf{B}$*:*

$$
\begin{array}{lll}
val(\mathbf{M}, w, p(t_1, \ldots, t_{\nu(p)})) = 1 & sse & \pi(p, w)(\pi(t_1, w), \ldots, \pi(t_\nu(p), w)) = 1, \\
val(\mathbf{M}, w, p(t_1, \ldots, t_{\nu(p)})) = 0 & sse & \pi(p, w)(\pi(t_1, w), \ldots, \pi(t_\nu(p), w)) = 0; \\
val(\mathbf{M}, w, \neg\varphi) = 1 & sse & val(\mathbf{M}, w, \neg\varphi) = 0, \\
val(\mathbf{M}, w, \neg\varphi) = 0 & sse & val(\mathbf{M}, w, \neg\varphi) = 1; \\
val(\mathbf{M}, w, \varphi \wedge \psi) = 1 & sse & val(\mathbf{M}, w, \varphi) = 1 \ e\ val(\mathbf{M}, w, \varphi) = 1, \\
val(\mathbf{M}, w, \varphi \wedge \psi) = 0 & sse & val(\mathbf{M}, w, \varphi) = 0 \ o\ val(\mathbf{M}, w, \varphi) = 0; \\
val(\mathbf{M}, w, \forall x\varphi) = 1 & sse & val(\mathbf{M}_{x:\alpha}, w, \varphi) = 1 \ per\ ogni\ \alpha \in \mathbf{D}, \\
val(\mathbf{M}, w, \forall x\varphi) = 0 & sse & val(\mathbf{M}_{x:\alpha}, w, \varphi) = 0 \ per\ qualche\ \alpha \in \mathbf{D}; \\
val(\mathbf{M}, w, B_t\varphi) = 1 & sse & bel_{\pi(t,w)}(w) \neq \perp \ e \\
 & & val(\mathbf{M}, w', \varphi) = 1 \ per\ ogni\ w' \in bel_{\pi(t,w)}(w), \\
val(\mathbf{M}, w, B_t\varphi) = 0 & sse & bel_{\pi(t,w)}(w) \neq \perp \ e \\
 & & val(\mathbf{M}, w', \varphi) = 0 \ per\ qualche\ w' \in bel_{\pi(t,w)}(w); \\
val(\mathbf{M}, w, \varphi) = \perp & sse & val(\mathbf{M}, w, \varphi) \neq 0 \ e\ val(\mathbf{M}, w, \varphi) \neq 1.
\end{array}
$$

Si noti che la definizione precedente comporta che i connettivi logici siano monotoni ([Bla86]).

La verità di una formula φ su un modello $\mathbf{M}$ è definita in modo classico:

Definizione 4.2 $\mathbf{M} \models \varphi$ *se e solo se* $val(\mathbf{M}, w, \varphi) = 1$*, per ogni* $w \in \mathbf{W}$*.*

I teoremi sono, invece, definiti analizzando tutte le possibili interpretazioni delle formule. Per fare ciò, utilizziamo il concetto di *tipo semantico*.

Definizione 4.3 *Un* tipo semantico τ *è un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbf{B}_\perp$.

Definizione 4.4 *Il tipo semantico* $\tau(\varphi)$ *di una formula* φ *è l'insieme di tutti i possibili valori di verità che* φ *assume su tutti i mondi di tutti i modelli:* $\tau(\varphi) = \bigcup_{\mathbf{M},w} val(\mathbf{M}, w, \varphi)$.

Poiché per ogni formula esiste una particolare interpretazione che la rende indefinita su un mondo di un modello,

Lemma 4.1 *Gli unici tipi semantici possibili per formule di QLB sono* $\{\perp, 0\}$, $\{\perp, 1\}$ *e* $\{\perp, 0, 1\}$.

Intuitivamente, i tre possibili tipi semantici di QLB corrispondono, rispettivamente, alle nozioni classiche di contraddizione, validità e soddisfacibilità.

Definizione 4.5 *Un* teorema *di QLB è una formula* φ *tale che* $0 \notin \tau(\varphi)$.

In altre parole un *teorema* di QLB è una formula di tipo $\{\perp,1\}$, cioè una formula talvolta indefinita, talvolta vera e mai falsa. Per indicare che una formula φ è un teorema di QLB, scriviamo: $\models_{QLB} \varphi$ o semplicemente $\models \varphi$.

4.4 Estensioni totali

Per definire una assiomatizzazione corretta di QLB introduciamo il concetto di *modello totale*, che costituisce il collegamento tra il sistema parziale in analisi ed un sistema modale predicativo booleano.

Definizione 4.6 *Due modelli* $\mathbf{M}' = \langle \mathbf{S}, \mathbf{I}' \rangle$ *e* $\mathbf{M}'' = \langle \mathbf{S}, \mathbf{I}'' \rangle$ *si dicono* simili.

Informalmente, due modelli *simili* si riferiscono allo stesso insieme di individui e di alternative epistemiche. A parte questo, tuttavia, possono essere molto diversi tra loro; ad esempio, l'interpretazione di un termine potrebbe essere definita ma differente sui mondi corrispondenti dei due modelli, oppure uno stesso individuo potrebbe avere funzioni di accessibilità associate diverse. È interessante notare come alcuni degli elementi della classe dei modelli simili possono essere tra loro comparati in termini di grado di definizione.

Definizione 4.7 *Una interpretazione doxastica* $\mathbf{I}'' = \langle \pi'', bel'' \rangle$ estende $\mathbf{I}' = \langle \pi', bel' \rangle$, *in simboli* $\mathbf{I}' \leq \mathbf{I}''$ *se e solo se*

$$\pi' \leq \pi'' \text{ e } bel' \leq bel''.$$

È infatti possibile ordinare una coppia di funzioni di interpretazione se una delle due estende la definizione di costanti, variabili, funzioni e predicati.

Definizione 4.8 *Un* modello $\mathbf{M}'' = \langle \mathbf{S}, \mathbf{I}'' \rangle$ estende *un modello* $\mathbf{M}' = \langle \mathbf{S}, \mathbf{I}' \rangle$, *in simboli* $\mathbf{M}' \leq \mathbf{M}''$ *se e solo se:*

$$\mathbf{I}' \leq \mathbf{I}''.$$

È semplice mostrare ([Lom95]) che:

Lemma 4.2 *Se* $\mathbf{M}' = \langle \mathbf{S}, \mathbf{I}' \rangle$, $\mathbf{M}'' = \langle \mathbf{S}, \mathbf{I}'' \rangle$ *e* $\mathbf{M}' \leq \mathbf{M}''$, *allora per ogni* $w \in \mathbf{W}$ *e ogni* $\varphi \in \mathbf{L}$:

$$val(\mathbf{M}', w, \varphi) \leq val(\mathbf{M}'', w, \varphi).$$

In altre parole, la funzione *val* è monotona rispetto al suo primo argomento. La dimostrazione si basa sulla monotonicità della semantica di QLB.

Definizione 4.9 *Un modello* $\mathbf{M} = \langle \mathbf{S}, \langle \pi, bel \rangle \rangle$ *si dice* totale *se e solo se* π *e bel sono funzioni totali.*

Siamo interessati ai modelli totali in quanto:

Lemma 4.3 *Se* $\mathbf{M} = \langle \mathbf{S}, \langle \pi, bel \rangle \rangle$ *è totale e* $\varphi \in \mathbf{L}$ *allora* $val(\mathbf{M}, w, \varphi) \neq \perp$, *per ogni* $w \in \mathbf{W}$.

Traccia della prova: Se π è totale, una formula del prim'ordine non può essere indefinita su $\mathbf{M}$. Poiché *bel* è totale (cioè ogni individuo è un agente), ogni formula di credenza ha valore di verità definito. La semantica dei connettivi è monotona •

Mentre generalmente un modello di QLB è parziale, vale il seguente:

Teorema 1 *Ogni modello di QLB ammette estensione totale.*

Prova: Per il Lemma 3.1 ogni funzione parziale ha almeno una estensione totale •

I modelli totali hanno un ruolo chiave per confrontare QLB con la logica modale classica. Infatti, mentre in QLB un teorema non è necessariamente vero su ogni mondo di un qualsiasi modello, nei modelli totali torna a valere l'implicazione classica:

Lemma 4.4 *Se* $\mathbf{M}$ *è totale e* $\varphi \in \mathbf{L}$*, allora:*

$\models \varphi$ *implica* $\mathbf{M} \models \varphi$.

Prova: Lemma 4.3 •

5 Alcune caratteristiche di QLB

In LMQ le *formule Barcan* costituiscono un frequente argomento di discussione. La loro validità, in particolare, è spesso contestata a causa del significato associato all'operatore modale; riteniamo che a proposito di logiche doxastiche tale posizione debba essere riveduta. In QLB risulta quanto segue.

Lemma 5.1 *Se* $t \in \mathbf{T}$ *e* $\varphi \in \mathbf{L}$*, allora:*

1. $\models \forall x B_t\varphi \Rightarrow B_t \forall x \varphi$,
2. $\models B_t \forall x \varphi \Rightarrow \forall x B_t \varphi$,
3. $\models \exists x B_t\varphi \Rightarrow B_t \exists x \varphi$,
4. $\not\models B_t \exists x \varphi \Rightarrow \exists x B_t \varphi$.

Poiché stiamo occupandoci di agenti ideali con complete capacità introspettive, ci pare ragionevole che gli agenti abbiano capacità di generalizzazione come espresso dalla prima formula Barcan. Inoltre, anche agenti logicamente piú deboli, gli uomini ad esempio, sarebbero in grado di compiere una tale generalizzazione avendo a che fare con dominii non troppo numerosi. La richieste della seconda formula sono inferiori a quelle della prima, mentre la terza è un caso particolare della prima. La quarta formula asserisce, invece, che "credere che esista un x che soddisfi φ non implica che esista un *unico* x che soddisfi φ in *tutte* le differenti alternative epistemiche". Ciò pare essere ragionevole; ad esempio qualcuno potrebbe credere che uno dei film piú recenti sia in programmazione nel suo cinema di quartiere, senza essere certo a riguardo di quale film sia. Nella semantica di QLB, la quarta formula non risulta valida perché, mentre nel conseguente x può essere interpretato differentemente nelle varie alternative epistemiche, nell'antecedente x risulta fissato ad uno specifico individuo. Riteniamo che la posizione espressa dal Lemma 5.1 a riguardo delle formule Barcan sia appropriata per la modellizzazione di credenti ideali.

Oltre alla parzialità di interpretazione, QLB possiede altre capacità espressive. Ciò è dovuto alle differenti modalità di interpretazione di costanti e variabili. Il seguente è un esempio delle diverse formule con cui è possibile esprimere "Paperino crede che Paperone sia un taccagno" (le relazioni tra queste sono espresse nella Figura 1):

1. $\exists x(x = Paperone \wedge B_{Paperino} taccagno(x))$, de re externa
2. $\exists x B_{Paperino}(x = Paperone \wedge taccagno(x))$, de re interna
3. $B_{Paperino} \exists x(x = Paperone \wedge taccagno(x))$, de dicto
4. $B_{Paperino} taccagno(Paperone)$, de dicto

alle quali, per utilità di confronto, aggiungiamo le seguenti:

5. $\exists x(B_{Paperino} taccagno(x))$, de re
6. $B_{Paperino} \exists x taccagno(x)$. de dicto

Tale espressività non è stata ottenuta abbandonando la logica del prim'ordine (LPO); è infatti possibile provare che LPO è incluso in QLB:

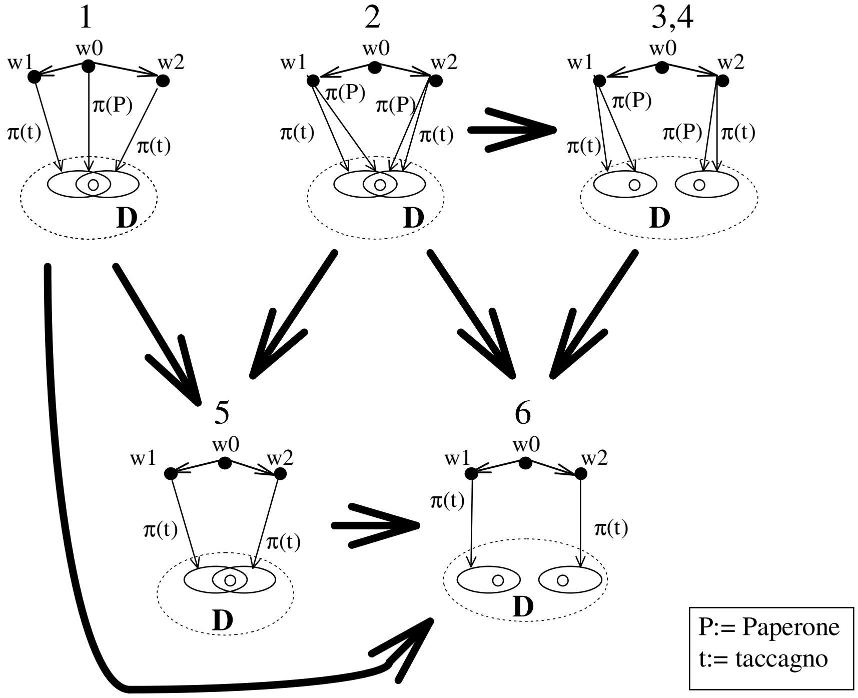

Figura 1: **Relazioni tra diverse formule che esprimono l'affermazione "Paperino crede che Paperone sia un taccagno"**

Lemma 5.2 *Se* $\models_{LPO} \varphi$*, allora* $\models_{QLB} \varphi$*.*

Traccia della prova: per assurdo. Un contromodello di QLB per φ ammette una estensione totale che può essere ristretta ad un modello di LPO •

Ciò non implica, naturalmente, che ogni risultato valido per LPO possa ancora essere applicato alle formule di QLB che contengono operatori di credenza. In particolare, il seguente teorema di LPO non è valido in QLB:

$$\models_{LPO} \forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a), \text{ in cui } a \in \mathbf{C}.$$

Un semplice controesempio in QLB è il seguente:

$$\not\models_{QLB} \forall x B_x \varphi(x) \Rightarrow B_a \varphi(a).$$

La ragione è che mentre nell'antecedente le diverse occorrenze di x sono interpretate su uno stesso elemento del dominio, nel conseguente le occorrenze della costante possono, in principio, essere diverse.

In generale, questo problema si origina allorché un designatore flessibile occorre in una formula in differenti gradi di annidamento modale; abbiamo bisogno, dunque, di una nuova regola per la sostituzione dei termini. In proposito introduciamo ciò che chiamiamo un *operatore di decontestualizzazione*:

Definizione 5.1 $[\ ] : \mathbf{L} \times \mathbf{T} \to \mathbf{L}$ *è un operatore di* decontestualizzazione *ed è definito come:* $[\varphi(t)]_t = \bigwedge_{j=1}^{n} (\exists x_j)(x_j = t) \wedge \varphi(x_1/t^1, \dots, x_n/t^n)$*; in cui* x_m/t^m *indica il rimpiazzamento in* φ *della* m *occorrenza del termine* t *in con la variabile legata* x_m.

Il lemma seguente mostra come l'operatore di decontestualizzazione cambi completamente il significato di una formula.

Lemma 5.3 $\not\models \varphi \Rightarrow [\varphi]_t$, *e* $\not\models [\varphi]_t \Rightarrow \varphi$.

È in ogni caso sufficiente per i nostri scopi, in quanto possiamo ora introdurre una regola di sostituzione per i termini:

Lemma 5.4 $\models \forall x \varphi \Rightarrow [\varphi(t)]_t$, *ove* t *è libera per* x *in* φ.

6 Una assiomatizzazione corretta di QLB

È ora possibile definire una assiomatizzazione alla Hilbert di QLB:

Teorema 2 $\Sigma_{QLB} = \langle \Gamma_{QLB}, R_{QLB} \rangle$, *in cui*

$\Gamma_{QLB} =$

P.	*Tutte le tautologie proposizionali.*
I.	$\forall x \varphi(x) \Rightarrow [\varphi(t)]_t$, *ove* t *è libera per* x *in* φ.
D.	$\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \forall x \psi)$.

BK. $\forall x (B_x \varphi \wedge B_x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow B_x \psi)$.

BD. $\forall x (B_x \varphi \Rightarrow \neg B_x \neg \varphi)$.

B4. $\forall x (B_x \varphi \Rightarrow B_x B_x \varphi)$.

B5. $\forall x (\neg B_x \varphi \Rightarrow B_x \neg B_x \varphi)$.

$R_{QLB} =$

MP. $\dfrac{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$.

BGen. $\dfrac{\varphi}{\forall x B_x \varphi}$.

è una assiomatizzazione corretta di QLB ([Lom95]).

Traccia di parte della prova:

B4: se, per assurdo, $val(\mathbf{M}, w, BD) = 0$, allora $val(\mathbf{M}, w', \varphi) = 1$ per ogni $w' \in bel_{\pi(x,w)}(w)$ e $val(\mathbf{M}, w''', \varphi) = 0$ per un $w''' \in bel_{\pi(x,w)}(w'')$ con $w'' \in bel_{\pi(x,w)}(w)$. Ma, per la proprietà 2 della Sezione 4.2, $w''' \in bel_{\pi(x,w)}(w)$ (in quanto definito) e w' potrebbe essere w''': assurdo. Quindi $0 \notin \tau(B4)$, cioè $\models B4$.

MP: se, per assurdo, $\models \varphi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ e $val(\mathbf{M}, w, \psi) = 0$, allora $val(\mathbf{M}', w, \psi) = 0$ con $\mathbf{M} \leq \mathbf{M}'$ e $\mathbf{M}'$ totale: assurdo •

L'assiomatizzazione presentata riflette le caratteristiche chiave del sistema modale KD45n. La differenza piú apparente è che mentre in QLB gli schemi di assiomi modali sono quantificati sugli agenti di credenza, in KD45n sono validi per un qualsiasi indice dell'operatore di credenza. Tale risultato è tuttavia piuttosto naturale poiché in KD45n si fa riferimento agli agenti tramite designatori rigidi e l'uso di variabile quantificate è la tecnica utilizzata in QLB per esprimere designatori rigidi; QLB permette anche designatori flessibilli e ciò si riflette nello schema di assiomi *I*.

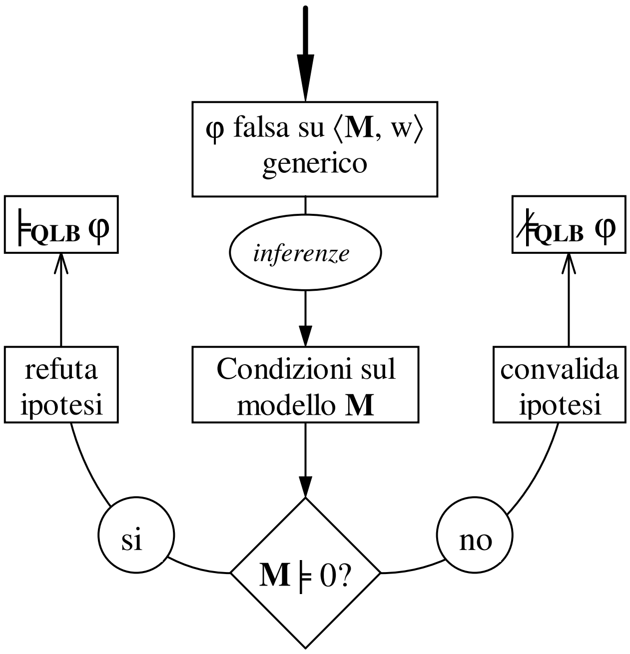

Figura 2: **Schema delle operazioni della procedura di refutazione.**

7 Una procedura di prova automatica per QLB

7.1 Introduzione

In questo paragrafo descriviamo succintamente una procedura per la dimostrazione automatica dei teoremi di QLB. In [Lom95] sono presenti maggiori dettagli, le modifiche da apportare per gestire il predicato di uguaglianza, esempi, nonché una implementazione in PROLOG.

È possibile osservare che le prove finora riportate sono state condotte per assurdo. Ciò non è casuale, poiché in tal modo è stato possibile sfruttare la monotonicità della semantica per ragionare su un modello totale durante tutta la prova, rendendo la dimostrazione totalmente classica[3]. Tale osservazione permette di riutilizzare, adattandolo a QLB, il metodo di Jackson-Reichgelt per logiche modali quantificate (la sequenza delle operazioni è indicata in figura 2). Il metodo di Jackson-Reichgelt ([JR89]) è un metodo a sequenti a refutazione per una logica predicativa classica a disegnatori rigidi con un unico operatore modale. Il nostro contributo

[3]Si noti che se i teoremi fossero stati definiti come formule vere in ogni stato del modello (fatta salva la restante semantica), le dimostrazioni sarebbero diventate classiche quando condotte per via diretta.

riguarda una estensione per designatori contestuali, operatori indicizzati da termini ed il mostrare che tale sistema classico è applicabile anche per particolari logiche parziali come QLB.

Trattandosi di una procedura a refutazione, il linguaggio delle prove è un linguaggio ibrido in cui convivono simboli sintattici e semantici. è possibile definire una sintassi specifica per le prove, come in [Lom95], ma, per ragioni di brevità ciò non sarà fatto in questa occasione.

7.2 Indici di mondo e sequenti

Un world-index di una formula rappresenta il mondo del contromodello in costruzione su cui è ambientata la formula a cui si riferisce. Formalmente:

Definizione 7.1 *Un world-index $wi \in \boldsymbol{WI}$ è una lista ordinata di simboli di mondo (o world-symbol) e rappresenta relazioni di accessibilità tra stati del modello:*

$(s1, \alpha(s1)) : \ldots : (sn, \alpha(sn))$ *con* $j \in \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{SK}$ *e* $\alpha(sj) \in \boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{SK} \cup \underline{\boldsymbol{V}} \cup \langle \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{WI} \rangle$*, ove:*

$\boldsymbol{N}$ *è l'insieme dei numeri naturali, atto a rappresentare mondi costanti,*

$\boldsymbol{X} = \{w1, w2, \ldots\}$ *è un insieme di mondi variabili,*

$\boldsymbol{D} = \{\underline{c1}, \underline{c2}, \ldots\}$ *è l'insieme degli individui del modello,*

$\boldsymbol{C}$ *è l'insieme delle costanti del linguaggio,*

$\underline{\mathbf{V}}$ *è un insieme di variabili sul dominio,*

$\boldsymbol{SK} = \{f(x_1, \ldots, x_{\nu(f)})\}$, $f \in \mathbf{F}_{\nu(f)}$, $x_j \in \boldsymbol{X} \cup \underline{\boldsymbol{V}}$*, ove* $\mathbf{F}_{\nu(f)}$ *è un insieme di funzioni di Skolem di arità* $\nu(f)$*.*

Un world-symbol $(sj, \alpha(sj))$ rappresenta un mondo (costante, variabile o funzione di Skolem di altri mondi o variabili individuali) sj, a cui si ha accesso a partire dal world-symbol alla destra dello stesso per mezzo della funzione (eventualmente variabile) $bel_{\alpha(sj)}$, proiezione della funzione bel sull'indice $\alpha(sj)$. Esempi di world-index sono proposti in figura 3.

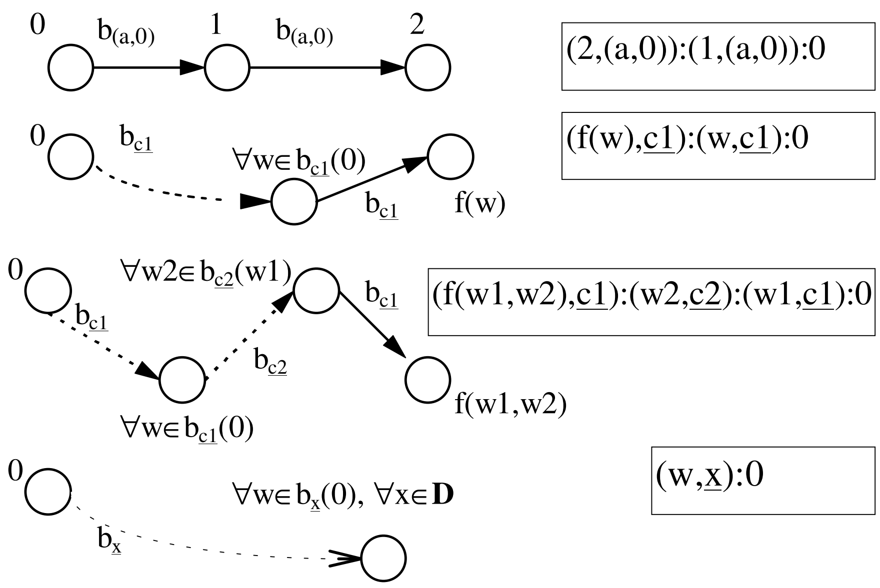

Figura 3: **Esempi di world-index per il metodo di prova automatica.**

L'ultimo elemento da destra di un world-index è detto end-symbol ed è il mondo di ambientazione della formula a cui l'indice si riferisce; il primo è detto start-symbol. Gli start-symbol non dispongono di relativo agent-symbol. Un mondo non variabile viene anche detto ground. Intuitivamente, un world-index rappresenta parte della struttura del modello in costruzione ed è utilizzato in fase di unificazione per verificare se una stessa formula debba essere contemporaneamente vera e falsa su uno stesso mondo del modello.

Le formule logiche, indicizzate dai rispettivi world-index, sono utlizzate all'interno del metodo di prova in struttura di sequente:

Definizione 7.2 *Se* $A = \{a1_{wi-a1}, \ldots, an_{wi-an}\}$ *e* $C = \{c1_{wi-c1}, \ldots, wm_{wi-cm}\}$ *sono insiemi di formule con rispettivo world-index,* $C \longleftarrow_{\mathrm{M}} A$ *se e solo se:*

- $\boldsymbol{M}$ *soddisfa le proprietà espresse dagli indici di mondo* $wi - a1, \ldots, wi - an$, $wi - c1, \ldots, wi - cm$ *delle formule in* A *e* C *e*

- *se* $val(\boldsymbol{M}, end - symbol(wi - aj), aj) = 1$, *per ogni* $j = 1, \ldots, n$ *allora* $val(\boldsymbol{M}, end - symbol(wi - ck), ck) = 1$, *per qualche* $1 \leq k \leq m$.

La seconda condizione è logicamente equivalente alla richiesta di qualche formula vera nell'antecedente o qualcuna falsa nel conseguente. Ciò spiega perché il sequente vuoto $\longleftarrow_{\mathbf{M}}$ equivale ad affermare che il modello $\mathbf{M}$ è contraddittorio, perché un sequente $\varphi_{wi-\varphi} \longleftarrow_{\mathbf{M}}$ equivale a $val(\mathbf{M}, end - symbol(wi - \varphi), \varphi) = 1$ e perché $\longleftarrow_{\mathbf{M}} \varphi_{wi-\varphi}$ equivale a $val(\mathbf{M}, end - symbol(wi - \varphi), \varphi) = 0$.

7.3 Unificazioni

Scopo ultimo del metodo refutativo è decidere della esistenza di un modello non contraddittorio per la formula del linguaggio che si intende provare o refutare. In particolare, un modello è assurdo se una stessa formula deve essere contemporaneamente vera e falsa su uno stesso stato dello stesso. Nel metodo di Jackson-Reichgelt ciò può essere verificato allorché due formule di significato semantico opposto unifichino insieme ai rispettivi world-index e l'unificazione composta sia, essa stessa, una unificazione ammissibile.

L'unificazione dei world-index è piuttosto complessa; a tale proposito proponiamo un algoritmo adatto a QLB, che fornisce le condizione affinché due end-symbol di due world-index unifichino tra loro.

Definizione 7.3 *Due world-index i e j unificano con unificazione σ se e solo se:*

1. *start-index(i) = start-index(j),*
2. *agent-symbol(end-symbol(i)) unifica con agent-symbol(end-symbol(j)) con unificazione σ',*
3. (a) *se end-symbol(i) e end-symbol(j) sono mondi ground e end-symbol(i) = end-symbol(j), allora gli indici i e j unificano con unificazione $\sigma'' = \emptyset$,*

(b) *se end-symbol(i) è un mondo ground e end-symbol(j) è un mondo variabile ed esiste una unificazione* σ''' *tale che*

end-symbol(i)$\in b_{agent-symbol(parent-symbol(j))}(parent - symbol(j))$, *allora*

$\sigma'' = \{end - symbol(i)/end - symbol(j)\} \odot \sigma''$,

(c) *se end-symbol(i) e end-symbol(j) sono mondi variabili e*

i. *esiste una unificazione* σ''' *che ammette*

end-symbol(i)$\in b_{agent-symbol(parent-symbol(j))}(parent - symbol(j))$, *oppure*

end-symbol(j)$\in b_{agent-symbol(parent-symbol(i))}(parent - symbol(i))$, *allora*

$\sigma'' = \{end - symbol(i)/end - symbol(j)\} \odot \sigma'''$,

ii. *altrimenti se parent-index(i) unifica con parent-index(j) con unificazione* σ''',

allora $\sigma'' = \{end - symbol(i)/end - symbol(j)\} \odot \sigma'''$.

4. $\sigma = \sigma' \odot \sigma''$ *è una unificazione ammissibile.*

È importante notare che viene richiesto che le eventuali unificazioni composte siano esse stesse unificazioni ammissibili (confrontare [Nil82] pagg 207-209).

L'unificazione tra formule è definita come segue:

Definizione 7.4 *Due formule* $\varphi(t1, \ldots, tn)_i$ *e* $\psi(s1, \ldots, sn)_j$ *unificano con unificazione* σ *se e solo se:*

- i *e* j *unificano con unificazione* σ';
- $\varphi = \psi$;
- *per ogni* $k = 1, \ldots, n$ t_k *e* s_k *unificano con unificazione* σ_k *e*
- $\sigma = \sigma' \odot (\odot_k \sigma_k)$ *è una unificazione ammissibile.*

7.4 Inferenza ed esempi

Possiamo ora definire compiutamente le regole di inferenza per il metodo di prova[4].

Definizione 7.5 *La dimostrazione di una formula chiusa $\varphi \in \mathbf{L}$ è un insieme finito ordinato di n sequenti Σ_j, in cui:*

- $\Sigma_0 = \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\varphi]_0$,
- $\Sigma_j = R(\Sigma_l), j = 0, \ldots, n$ *e* $R \in \{\neg C, \neg A, \Rightarrow C, \Rightarrow A, BC, BA, \forall C, \forall A\}$,
- $\Sigma_j = UR(\Sigma_l, \Sigma_m), j = 0, \ldots, n, 0 \leq l \leq j, 0 \leq m \leq j$,
- $\Sigma_n = \longleftarrow_{\mathbf{M}}$;

($\neg C$)	*Se* $A, [\neg\varphi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$	*, allora*	$A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\neg\varphi]_i, B$.
($\neg A$)	*Se* $A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\neg\varphi]_i, B$	*, allora*	$A, [\neg\varphi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$.
($\Rightarrow C$)	*Se* $A, [\varphi \Rightarrow \psi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$	*, allora*	$A, [\psi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\varphi]_i, B$.
($\Rightarrow A$)	*Se* $A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\varphi \Rightarrow \psi]_i, B$	*, allora*	$A, [\varphi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}}$ *e* $A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\psi]_i, B$.
(BC)	*Se* $A, [B_\alpha\varphi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$	*, allora*	$A, [\varphi]_j \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$,

in cui:
- *Se* $\alpha \in \mathbf{C}$, *allora* $j = (w, (\alpha, i)) : i$, *w nuova variabile di mondo,*
- *altrimenti* $j = (w, \alpha) : i$, *w nuova variabile di mondo.*

(BA)	*Se* $A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [B_\alpha\varphi]_i, B$	*, allora*	$A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\varphi]_j, B$,

ove:
- *se in φ non occorre alcuna variabile libera $\underline{x} \in \underline{\mathbf{V}}$ e i è un indice ground,*
  $j = (n, \alpha(i)) : i$, *con n nuovo mondo costante.*
- *altrimenti* $j = (f_{m+n}(\underline{x1}, \ldots, \underline{xm}, w1, \ldots, wn), \alpha(i)) : i$, *con* $f_{m+n} \in \mathbf{SK}$,
  $\underline{x1}, \ldots, \underline{xm}$ *variabili che occorrono libere in φ*
  e $w1, \ldots, wn$ variabili di mondo in i.

($\forall C$)	*Se* $A, [\forall x\varphi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$	*, allora*	$A, [\varphi(\underline{x}/x)]_j \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$

[4] per comodità di lettura indichiamo con lettere maiuscole insiemi di formule indiciate, mentre le singole formule sono racchiuse da parentesi per evidenziarne l'indice.

ove $\underline{x}$ è una nuova variabile in $\mathbf{V}$.

(∀A) *Se* $A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\forall x \varphi]_i, B$ *, allora* $A \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\varphi(\underline{a}/x)]_j, B$

ove:

- *se nessuna variabile $\underline{x} \in \mathbf{V}$ occorre libera in φ e i è un indice ground, $\underline{a} \in \mathbf{D}$ è una nuova costante individuale.*
- *altrimenti $\underline{a} = f_{m+n}(\underline{x1}, \ldots, \underline{xm}, w1, \ldots, wn)$, con $f_{m+n} \in \mathbf{SK}$, $\underline{x1}, \ldots, \underline{xm}$ variabili che occorrono libere in φ e $w1, \ldots, wn$ variabili di mondo in i.*

(UR) *Se $A, [\varphi]_i \longleftarrow_{\mathbf{M}} B$ e $A' \longleftarrow_{\mathbf{M}} [\psi]_j, B'$ e $[\varphi]_i$ e $[\psi]_j$ unificano con unificazione σ, allora $A\sigma, A'\sigma \longleftarrow_{\mathbf{M}} B\sigma, B'\sigma$.*

Ci limitiamo, in questa sede, a due semplici esempi di prova:

	$\models \forall x(B_x \varphi(x)) \Rightarrow \forall x(B_x B_x \varphi(x))$	
1	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [\forall x(B_x \varphi(x)) \Rightarrow \forall x(B_x B_x \varphi(x))]_0$	Ipotesi di assurdo
2	$[\forall x B_x \varphi(x)]_0 \longleftarrow_{\mathbf{M}}$	$1, \Rightarrow A$
3	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [\forall x B_x B_x \varphi(x)]_0$	$1, \Rightarrow A$
4	$[B_{\underline{y1}} \varphi(\underline{y1})]_0 \longleftarrow_{\mathbf{M}}$	$2, \forall C$
5	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [B_{\underline{c1}} B_{\underline{c1}} \varphi(\underline{c1})]_0$	$3, \forall A$
6	$[\varphi(\underline{y1})]_{(w1,\underline{y1}):0} \longleftarrow_{\mathbf{M}}$	$4, BC$
7	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [B_{\underline{c1}} \varphi(\underline{c1})]_{(1,\underline{c1}):0}$	$5, BA$
8	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [\varphi(\underline{c1})]_{(2,\underline{c1}):(1,\underline{c1}):0}$	$7, BA$
9	$\longleftarrow_{\mathbf{M}}$	$6, 8, UR : \sigma = \{w1/2, \underline{y1}/\underline{c1}\}$

L'unificazione finale è possibile per il punto (b) dell'algoritmo di unificazione dei world-index, tenendo conto del fatto che la relazione di accessibilità è transitiva. In questo caso particolare la unificazione tra le occorrenze della formula φ è identica ad una delle unificazioni compiute sui world-index. Poiché è stato possibile dedurre il sequente vuoto, ogni contromodello per la formula in questione è assurdo. La formula è dunque un teorema di QLB.

Come ulteriore esempio, verifichiamo che:

	$\not\models B_a\varphi(a) \Rightarrow \exists x B_x\varphi(x)$	
1	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [B_a\varphi(a) \Rightarrow \exists x B_x\varphi(x)]_0$	Ipotesi di assurdo
2	$[B_a\varphi(a)]_0 \longleftarrow_{\mathbf{M}}$	$1, \Rightarrow A$
3	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [\exists x B_x\varphi(x)]_0$	$1, \Rightarrow C$
4	$[\varphi(a)]_{(w1,(a,0)):0} \longleftarrow_{\mathbf{M}}$	$2, BC$
5	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [B_{\underline{y1}}\varphi(\underline{y1})]_0$	$3, \neg A, \forall C, \neg C$
6	$\longleftarrow_{\mathbf{M}} [\varphi(\underline{y1})]_{(f(\underline{y1}),\underline{y1}):0}$	$5, BA$

La regola UR non può derivare il sequente vuoto in quanto l'algoritmo di unificazione dei world-index produrrebbe $\sigma' = \{w1/f(\underline{y1}), \underline{y1}/(a,0)\}$; l'unificazione degli argomenti produrrebbe, invece $\sigma'' = \{\underline{y1}/(a,(w1,(a,0)) : 0)\}$. Le due unificazioni non sono tuttavia componibili perché, per la non riflessività di *bel*, 0 non può unificare con $(w1,(a,0)) : 0$. La formula è dunque falsificabile sul contromodello in analisi, dunque non è un teorema di QLB.

8 Conclusioni e sviluppi futuri

Negli ultimi vent'anni le logiche doxastiche hanno giocato un ruolo molto importante in Intelligenza Artificiale. Tuttavia, il fatto che non esistesse una estensione predicativa, comunemente accettata ha impedito l'utilizzo di uno strumento cosí potente in molte aree di interesse pratico.

In questo aricolo abbiamo proposto una possibile estensione di KD45n a livello predicativo, definendo un sistema del prim'ordine in cui è disponibile una famiglia di operatori modali indicizzati da un termine del linguaggio. Abbiamo motivato perché una semantica adeguata per le formule doxastiche richieda una logica a tre valori di verità e una interpretazione contestuale del linguaggio. Abbiamo comunque definito una nozione di teorema che permette tanto la compatibilità di QLB con la logica classica predicativa e la logica modale, quanto la costruzione di una procedura di dimostrazione automatica dei teoremi dello stesso.

Sorprendentemente, il metodo di dimostrazione automatica proposto risulta una modifica di una procedura a refutazione per logiche modali predicative Booleane. Ciò è possibile grazie alla particolare definizione di teorema ed alla monotonicità della semantica di QLB. Una implementazione del metodo di prova in PROLOG è parte integrante di questo lavoro, ma non è stata qui presentata.

Nonostante questi risultati piuttosto incoraggianti, QLB non è ancora pronto per costituire uno strumento completo per ragionare sulle credenze di un insieme di agenti. Per tale scopo, è necessario aggiungere una definizione adeguata di conseguenza logica e la completezza della assiomatizzazione presentata andrebbe investigata.

Se raggiungeremo questi obbiettivi, pensiamo di estendere QLB con un operatore di credenza mutua ([Col93]) e con altri operatori modali per diversi tipi di stati mentali, come, ad esempio, le intenzioni. Tutto ciò dovrebbe essere condotto, crediamo, sempre prestando attenzione alla possibilità di mantenere un efficace sistema di prova automatica.

References

[Bla86] Stephen Blamey. Partial logic. In *Handbook of Philosophical Logic*, volume 3, pages 1–70. D. Gabbay and F. Guenthner Eds., 1986.

[Che80] Bryan Chellas. *Modal Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Col93] M. Colombetti. Formal semantics for mutual belief. *Artificial Intelligence*, 62:341–353, 1993.

[Gar84] James Garson. Quantification in modal logic. In *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2, pages 249–307. D. Gabbay and F. Guenthner Eds., 1984.

[Hin62] Jakko Hintikka. *Knowledge and Belief, an introduction to the logic of the two notions.* Cornell University Press, Ithaca(NY) and London, 1962.

[HM92] J. Halpern and Y. Moses. A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. *Artificial Intelligence*, 54:319–379, 1992.

[JR89] Peter Jackson and Han Reichgelt. A general proof method for modal predicate logic. In *Logic-Based Knowledge Representation.* MIT Press, 1989.

[Lom95] Alessio Lomuscio. QLB: una logica predicativa delle credenze. sintassi, semantica e una procedura di prova automatica dei teoremi. Master's thesis, Politecnico di Milano, December 1995.

[Nil82] N. Nilsson. *Principles of Artificial Intelligence.* Springer Verlag, 1982.

[WJ95] M. Wooldridge and N. R. Jennings. Intelligent agents: Theory and practice. *Knowledge Engineering Review*, 2(10), 1995.